MATHÉMATIQUES I

Algèbre et analyse

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 4

N. B. — *Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible...).*

Cette épreuve est constituée d'un problème unique comprenant trois parties.

PREMIÈRE PARTIE

Soit la fonction :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 + x - x \operatorname{Log} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \quad \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

(les notations Log et $|\ |$ désignent respectivement le logarithme népérien et la valeur absolue).

Soit (C) la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé $\{ O, (\vec{i}, \vec{j}) \}$.

1° Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2° Étudier la dérivabilité de cette fonction sur $\mathbb{R}$.

Quand elle existe, définir la fonction dérivée de φ.

Préciser la tangente à la courbe (C) au point Ω (0, 1).

3° Montrer que Ω est centre de symétrie de (C).

4° Étudier les branches infinies de (C) et dresser le tableau de variations de φ.

5° Montrer que la courbe (C) coupe l'axe de repère $\{O, \vec{i}\}$ en un point d'abscisse x_0 ($x_0 > 1$).

Déterminer la valeur approchée de x_0 à 0,01 près par défaut.

6° Construire la courbe (C).

7° Soit la droite (D) d'équation $y = x + 1$.

a. Déterminer, par leurs coordonnées, les points d'intersection de (C) et (D).

b. Pour tout réel t on pose $\gamma(t) = t + 1$.

Prouver, pour tout réel x, l'existence de l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^x [\varphi(t) - \gamma(t)]\, dt$$

et calculer cette intégrale.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\Phi(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

d. Calculer l'aire du domaine Δ ensemble des points M (x, y) tels que

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x) \end{cases}$$

DEUXIÈME PARTIE

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition usuelle des fonctions et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On considère les fonctions :

$$\varphi_0 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array} \right.$$

$$\varphi_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$$

$$\varphi_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x \operatorname{Log} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

1° Montrer que $\mathcal{B} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une famille libre de $\mathcal{F}$.

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{B}$.

Montrer que la fonction φ définie dans la première partie est un élément de E et donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

2° Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Soit U de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$.

Quelles sont, dans cette base, les coordonnées de $f(U)$?

b. Montrer que l'endomorphisme f est bijectif et déterminer, relativement à $\mathcal{B}$, la matrice de l'endomorphisme réciproque f^{-1}.

c. Résoudre dans E l'équation $f(U) = \varphi$, φ étant la fonction définie dans la première partie.

3° On pose $M' = M - I$, I étant la matrice unité d'ordre 3.

a. Montrer que M' n'est pas inversible.

b. Soit g l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est M'.

Déterminer une base de Im (g).

En déduire le rang de g et la dimension de Ker (g).

4° Vérifier la relation $(M - I)(M + 3I) = 0$ où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3. Montrer que cette relation permet de retrouver les résultats des questions 2° *b.* et 3° *a.*

Troisième partie

1° On pose :

$$\begin{cases} M^0 = I \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ M^{n+1} = M^n \times M. \end{cases}$$

a. Exprimer M^2 en fonction de M et I.

Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = u_n M + v_n I$ où u_n et v_n vérifient les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad v_0 = 1 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases} \end{cases}$$

b. Vérifier la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = 1.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n + 1.$$

Exprimer u_n, v_n et M^n en fonction de n.

2° On se propose de déterminer u_n et v_n par une autre méthode.

a. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

La méthode étudiée dans cette question consiste à déterminer A^n puisque, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

b. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer P^2.

En déduire P^{-1} puis P^n pour tout entier naturel n.

c. Calculer $A' = P^{-1} \times A \times P$.

En déduire A'^n puis A^n pour tout entier naturel n.

Retrouver alors les valeurs respectives de u_n et v_n en fonction de n.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail